

חברת תרגילים מספרים מרוכבים

תוכן עניינים

1. ההגדרה, פעולות החשבון, המספר הצמוד והוצאת שורש ריבועי.....2
2. בעיות עם סדרה חשבונית וסדרה הנדסית.....5
3. ערך מוחלט למספר מרוכב ומשוואות עם ערך מוחלט של מספר מרוכב $|z|$6
4. ההצגה הטריגונומטרית (הקוטבית) של מספרים מרוכבים.....7
5. חיבור וחיסור מספרים מרוכבים במישור גאוס (משמעות גיאומטרית).....8
6. כפל וחילוק של מספרים מרוכבים בהצגה טריגונומטרית (קוטבית).....8
7. בעיות גיאומטריות במישור של גאוס.....9
8. מציאת מקום גיאומטרי במישור של גאוס.....10
9. משפט דה מואבר.....11
10. שורשים מסדר גבוה (הוצאת שורש מסדר גבוה ממספר מרוכב).....12
11. שורשי היחידה.....12
12. תרגילי בגרות 5 יח"ל.....13

תרגיל 1- חיבור, חיסור וכפל במספרים מרוכבים

חשב:

א. $(4 + 5i) + (6 + 2i)$

ב. $-6 - 3i - (-3 - i)$

ג. $3(2 - 5i)$

ד. $(5 + 2i) \cdot (6 + 4i)$

ה. $(2 + i)(2 - i)$

ו. נתון מספר מרוכב: $z = (k - 2) + (k + 4)i$

k הוא פרמטר ממשי. מצאו את ערכי k עבורו:

1. z הוא מספר ממשי טהור.

2. z הוא מספר מדומה טהור.

תרגיל 2- שוויון בין שני מספרים מרוכבים

1. נתון: $z_1 = 2x + yi$

$$z_2 = 4 + i$$

$$z_1 = z_2$$

מצאו את x ו y.

2. מצאו את x, y המקיימים:

$$4x + 2y + 2x^2i + 2(iy)^2i = 9$$

תרגיל 3- חזקות של מספרים מרוכבים

חשבו את הביטויים הבאים:

א. $i^5, i^{14}, i^{21}, (\sqrt{2}i)^{16}, (i^9 + i^{17})^5, -i^{76}$

ב. $i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2}, i^{4n+3}$

ג. $(5 + 3i)^2$

ד. $(2 + 2i)^3$

ה. $(1 - i)^{15}$

תרגיל 4- המספר הצמוד, חילוק מספרים מרוכבים

א. מצא את המספר הצמוד לכל אחד מהמספרים המרוכבים הבאים:

- $5 + 3i$
- $7 - 2i$
- $-7 + 2i$
- $-6i$
- $3i$
- 5

ב. חשב: (כתוב את התוצאה בצורה $z = a + bi$)

- $\frac{6}{2+i}$
- $\frac{1+i}{1-2i}$
- $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$
- $\frac{4}{2-2i} + \frac{4}{(1-i)^2}$

תרגיל 5

פתור את המשוואות הבאות: (מצא את z)

א. $z^2 = -9$

ב. $z^2 + 121 = 0$

ג. $2z^2 + 18 = 0$

ד. $2z + 8z + 5 = 0$

ה. $z^3 + 36z = 0$

ו. $z^4 = 1$

ז. $z^4 - 5z^2 + 6 = 0$

תרגיל 6

פתור את המשוואות הבאות:

א. $2iz - 2 = 6 - 2i$

ב. $6z + 2 = \frac{16-4z}{2i}$

ג. $\frac{z-3}{z+i} = 4i$

$$2i\bar{z} - 6z = \overline{8i} \quad \text{ד.}$$

$$\bar{z}z + \bar{z} = 3 - i \quad \text{ה.}$$

$$4\bar{z} + z^2 = 11 \quad \text{ו.}$$

$$\bar{z} = z^2 \quad \text{ז.}$$

תרגיל 7- הוצאת שורש ריבועי במספרים מרוכבים

חשב את השורשים הבאים:

$$\text{א. } \sqrt{2i}$$

$$\text{ב. } \sqrt{i}$$

$$\text{ג. } \sqrt{7 - 24i}$$

תרגיל 8- משוואות עם הוצאת שורש

פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } z^2 = -65 - 72i$$

$$\text{ב. } z^2 - 11 = 60i$$

$$\text{ג. } z^2 + 1 - 2z + 8i = 0$$

$$\text{ד. } 2z^2 - 2(5 + 11i)z + 58i - 44 = 0$$

תרגיל 9 (קיץ 2008 יח"ל)

$$\text{נתונה המשוואה: } (mi + 4)z^2 + (m - 4i)z - 2 = 0$$

m הוא פרמטר. z ו- m הם מספרים מרוכבים.

(1) מצא עבור איזה ערך של m יש למשוואה פתרון יחיד.

(2) מצא את הפתרון היחיד של המשוואה.

מספרים מרוכבים- בעיות עם סדרה חשבונית וסדרה הנדסית

10. בסדרה חשבונית נתון: $a_1 = 4 - 2i$

$$d = 3 + 3i$$

א. חשב את a_{10}

ב. חשב את S_6

11. בסדרה חשבונית נתון כי $S_{12} = 258 + 96i$.

הפרש הסדרה הוא: $3 + 2i$.

מצא את a_1 .

12. לפניכם סדרה חשבונית. נתון: $a_1 = k - 7i$ (k מספר ממשי).

$$d = -1 + 2i$$

$$S_n = -5 + 20i$$

א. מצא את k.

ב. האם בסדרה הנתונה יש איבר שהוא מספר ממשי?

13. נתונים שלושת האיברים של סדרה חשבונית: $t + 6i$, $-12 + 2i$, $S - 24i$ (t, s מספרים

ממשיים).

א. חשב את t, s.

ב. חשב את מנת הסדרה.

ג. חשב את a_4 .

ד. חשב את S_5 .

14. (קיץ 2004 מועד א').

נתונה הסדרה ההנדסית: $-i, 1 - i, 2, \dots$

מצא את a_9 .

15. (קיץ 2007 מועד א').

בסדרה הנדסית נתון: $a_3 = -5 + 3i$, $a_6 = 3 + 5i$

הוכח $a_3 = a_{15}$.

ערך מוחלט למספר מרוכב ומשוואות עם ערך מוחלט של מספר מרוכב $|z|$

16. חשב את הערך המוחלט של המספרים הבאים:

$$z = 4 - 3i \quad \bullet$$

$$z = i \quad \bullet$$

$$z = 1 + i \quad \bullet$$

$$z = -5i \quad \bullet$$

17. נתון המספר המרוכב $z = 6 + 8i$

חשב את הערך המוחלט $|3z - 2i|$

18. פתור את המשוואות הבאות: (מצא את z)

$$\text{א. } z + |z| = 8 + 4i$$

$$\text{ב. } z - |z| = -1 + 3i$$

$$\text{ג. } 2i|z|^2 + 12 = 2z + 184i$$

$$\text{ד. } |z - (1 - i)|^2 = |z|^2 + \left| \left(\frac{2}{1+i} \right)^2 \right|$$

19. נתון $z_1 = -5 + 12i$

$$z_2 = 3 - 4i$$

חשבו את: $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 \cdot z_2|$

הוכיחו כי: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{הוכיחו כי}$$

הצגה הטריגונומטרית (הקוטבית) של מספרים מרוכבים

20. כתוב את המספרים הבאים בצורה אלגברית (קרטזית):

$$\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ \bullet$$

$$2 \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ \bullet$$

$$10(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) \bullet$$

$$4 \operatorname{cis} 60^\circ \bullet$$

$$\frac{1}{4} \operatorname{cis}(-300^\circ) \bullet$$

21. כתוב את המספרים הבאים בצורה קוטבית (טריגונומטרית):

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \bullet$$

$$-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i \bullet$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \bullet$$

$$i \bullet$$

$$6 \bullet$$

$$-4 \bullet$$

22. נתון $r \cdot \operatorname{cis} 210^\circ = x - 6i$

מצא את r ואת x .

23. נתון $4 \cos \theta = -2\sqrt{2} + yi$ ($0 \leq \theta \leq 360^\circ$).

מצא את θ, y .

24. נתון: $r \cdot \operatorname{cis} 5\alpha = r \cdot \operatorname{cis} \alpha$

מצא את α ($0 \leq \alpha < 360$)

חיבור וחסור מספרים מרוכבים במישור גאוס (משמעות גיאומטרית)

25. בכל סעיף נתונים שני מספרים מרוכבים z_1, z_2 .

סמן את המספרים במישור גאוס וחבר אותם בצורה גיאומטרית:

א. $z_1 = 2 + 2i, z_2 = 4 + i$

ב. $z_1 = 2 - 2i, z_2 = -4 + i$

בצעו חיסור:

ג. $z_1 = 3 + 2i, z_2 = -3i + 4$

ד. $z_1 = -2 - i, z_2 = 3 - 2i$

כפל וחילוק של מספרים מרוכבים בהצגה טריגונומטרית (קוטבית)

26. חשב: (כתוב בצורה $z = r \cdot \text{cis } \theta$)

א. $2 \text{ cis } 40^\circ \cdot 3 \text{ cis } 10^\circ$

ב. $4 \text{ cis } 220^\circ \cdot \text{cis}(-80^\circ) \cdot 3 \text{ cis } 70^\circ$

ג. $\frac{6 \text{ cis } 130^\circ}{2 \text{ cis } 50^\circ}$

ד. $\frac{\text{cis } 460^\circ}{\text{cis } 200^\circ}$

ה. $\frac{1}{\text{cis } 90^\circ}$

27. נתון $z = r \text{ cis } \theta$

חשב: (כתוב בהצגה כותבית)

$$\bar{z}, |z|, \frac{1}{z}, \frac{1}{\bar{z}}$$

$$z \cdot \bar{z}, \frac{z}{\bar{z}}, iz, i\bar{z}$$

$$-z, \frac{z}{i}, z + \bar{z}$$

$$z - \bar{z}, z^2$$

28. נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$z_1 = \sqrt{3} \cos 50^\circ + i\sqrt{3} \sin 50^\circ, z_2 = \cos 140^\circ + i \sin 140^\circ$$

מצא את ההצגה הקוטבית $z_1 - z_2$.

בעיות גיאומטריות במישור של גאוס

29. (תרגיל מבגרות קיץ 2005 מועד ב')

- א. z_1 הוא קודקוד של ריבוע החסום במעגל, שמרכזו בראשית הצירים O . נתון: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$. מצא את שלושת הקודקודים האחרים של הריבוע.
- ב. z_2, z_3 ו- z_4 הם שלושת הקודקודים שמצאת בסעיף א. נסמן: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = P$. הראה כי הישר OP עובר דרך הקודקוד z_1 של הריבוע. (50)

30.

(תרגיל מבגרות קיץ 2010 מועד א') המספרים המרוכבים z_1, z_2, z_3 הם קודקודים של משולש שווה-צלעות, הנמצאים על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

- א. הוכח: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.
- ב. z_1 ו- z_2 נמצאים על המקום הגאומטרי $|\bar{z} - z| = 6$. הוא מספר מרוכב. $\arg z_1 = 60^\circ$. מצא את z_1, z_2, z_3 .

31. (תרגיל מבגרות חורף 2011)

z_1, z_2 ו- z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים הנמצאים על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים. z_1 ו- z_2 נמצאים ברביע הראשון, ו- z_3 נמצא ברביע השלישי.

- נסמן $z_1 = r_1 (\cos \alpha + i \sin \alpha)$.
- א. האם המנה $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ היא מספר ממשי, מספר מדומה טהור או מספר שהוא אינו ממשי ואינו מדומה? נמק.

נתון גם כי z_1 ו- z_3 נמצאים על מעגל היחידה, ו- $|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}| = \frac{1}{2}$.

ב. חשב את הערך המוחלט של z_2 .

ג. z_4 הוא הצמוד של z_1 .

הבע באמצעות α את שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות z_1, z_3 ו- z_4 .

מציאת מקום גיאומטרי במישור של גאוס

$$32. \text{ נתונה המשוואה } \frac{|z^2 - i|}{|z^2 + 3i|} = 1$$

מצא את המקום הגיאומטרי במישור גאוס המתואר על ידי המשוואה.

$$\text{נתון כי } z = x + yi$$

$$33. \text{ נתונה המשוואה } |z - \bar{z} + i| = |3z + \bar{z} - i|$$

מצא את המקום הגיאומטרי במישור גאוס המתואר על ידי המשוואה.

$$\text{נתון כי } z = x + yi$$

34. (תרגיל מבגרות קיץ 2007 מועד ב')

המספר המרוכב $z = x + iy$ מקיים את המשוואה: $|z - (1 - i)|^2 = |z|^2 + \left(\frac{2}{1+i}\right)^2$.
מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x, y) המקיימות את המשוואה.

35. (תרגיל מבגרות חורף 2013)

א. נתונים המספרים המרוכבים z המקיימים: $|z - 3i| = 1$.

(1) סרטט במערכת צירים את המקום הגאומטרי של המספרים z . נמק.

(2) על פי הסרטוט שסרטטת בתת-סעיף א(1),

סרטט באותה מערכת צירים את המקום הגאומטרי של המספרים \bar{z} .

(3) המספר $z_0 = 1 + iy$ נמצא על המקום הגאומטרי של המספרים z שסרטטת ב־א(1).

מצא את המרחק בין הנקודה המייצגת את z_0 ובין הנקודה המייצגת את \bar{z}_0 .

36. סרטט במערכת צירים את המקום הגיאומטרי המקיים:

$$|z^2 - 3i| = |z^2 - 1|$$

משפט דה מואבר

37. חשב את החזקות הבאות וכתוב את התוצאה בצורה קוטבית $\text{rcis } \theta$:

- $(2 \text{ cis } 20^\circ)^6$
- $(1 \text{ cis } 15^\circ)^7$
- $\left(\frac{1}{\text{cis } 30^\circ}\right)^5$

38. חשב את החזקות הבאות וכתוב בצורה אלגברית $x + yi$:

- א. $(1 + i)^{18}$
- ב. $(1 - 2i)^4$
- ג. $(-3 - i)^{-6}$

39. נתון $z = \text{rcis } \theta$. הבע באמצעות r, θ את ההצגה הקוטבית של המספרים:

$$z^5, \bar{z}^3, \frac{1}{z^8}, iz^4, |z|^7, \left(\frac{z}{i}\right)^9$$

40. נתון: $z_1 = r_1 \cdot \cos \theta_1, z_2 = r_2 \cdot \cos \theta_2$

$$\text{הבע את: } z_1^2 \cdot z_2^3, \frac{z_1^4}{z_2^2}, \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^8, (z_1 \cdot z_2)^9$$

41. (בגרות 5 יח"ל קיץ 2006 מועד ב').

$$\text{נתון המספר המרוכב } z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

הוכח כי z מקיים את המשוואה $z^{3n} + z^{3m+1} + z^{3k+2} = 0$ (n, m, k הם מספרים טבעיים).

42. (בגרות 5 יח"ל קיץ 2011 מועד ב').

א. נתון מספר מרוכב z (שאינו ממשי) המקיים $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \beta, z \neq 0$.

(1) הבע באמצעות β את z . מצא את שני הפתרונות.

(2) האם הביטוי $z^n + \frac{1}{z^n}$ הוא מספר ממשי טהור, מדומה טהור, או מורכב ממספר

ממשי וממספר מדומה? נמק. (ח הוא מספר טבעי. z הוא המספר הנתון).

ב. נתון כי מספר מרוכב z נמצא ברביע הראשון מחוץ למעגל היחידה.

סרטט במערכת צירים סקיצה של מעגל היחידה, ומקם בסרטוט את המספר z ,

ואת: (1) $\frac{1}{z}$. נמק. (2) $\frac{1}{z}$. נמק. (3) $z + \bar{z}$. נמק.

(אין קשר בין הסעיפים.)

שורשים מסדר גבוה (הוצאת שורש מסדר גבוה ממספר מרוכב)

43. פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^4 = 2(1 + \sqrt{3}i)$

ב. $z^5 = -16\sqrt{3} - 16i$

ג. $z^4 = 81$

ד. $z^5 = 32i$

ה. $z^3 = -8i$

44.

(מבגרות חורף 2006) z_1, z_2, z_3, z_4 ו- z_5 הם פתרונות המשוואה $z^5 = -16\sqrt{3} - 16i$

א. מצא את פתרונות המשוואה.

ב. נמצא ברביע הראשון, z_2 ברביע השני ו- z_5 ברביע הרביעי.

נסמן: $A = \frac{z_5}{z_2^3}$, $B = z_1^3$

l הוא הישר העובר דרך ראשית הצירים ודרך הנקודה A.

p הוא הישר העובר דרך ראשית הצירים ודרך הנקודה B.

מצא את גודל הזווית שבין הישר l לישר p .

45. (מבגרות קיץ 2012 מועד א')

נתונה המשוואה $z^3 = w$.

נתון כי אחד הפתרונות של המשוואה הוא $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

הראה כי מכפלה של כל שני פתרונות של המשוואה גם היא פתרון של המשוואה.

46. (מבגרות קיץ 2014 מועד ב')

א. פתור את המשוואה $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$, z הוא מספר מרוכב.

ב. האם שלושה מן הפתרונות שמצאת בסעיף א נמצאים על המקום הגאומטרי של

המספרים המרוכבים w השונים מ-0 ומקיימים: $107^\circ < \arg(w) < 253^\circ$? נמק.

שורשי היחידה

47. א. פתור את המשוואה $z^4 = 1$.

ב. מצא את שורשי היחידה מסדר 5.

חשב את סכום השורשים.

חשב את מכפלת השורשים.

תרגילי בגרות 5 יח"ל

1. קיץ 2024 מועד א' שאלון 582 שאלה 3

במעוין ABCD הקודקוד A נמצא ברביע הראשון, והקודקוד B נמצא ברביע השני במישור גאוס. אלכסוני המעוין נפגשים בראשית הצירים. המספר המרוכב z מייצג את הקודקוד A. נתון: $BD = 2AC$.

א. הביעו באמצעות z את המספרים שמייצגים את הקודקודים B, C ו-D.

נסמן: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

ב. ענו על התת-סעיפים (1) ו-(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות r ו- θ אם יש צורך.

(1) כתבו הצגה קוטבית של ארבעת המספרים ההופכיים $(\frac{1}{z}, \dots)$ למספרים המייצגים את קודקודי המעוין.

(2) ארבעת המספרים שמצאתם בתת-סעיף ב(1) מייצגים קודקודים של מרובע.

מצאו את שטח המרובע שנוצר על ידי קודקודים אלה.

ג. נתונה המשוואה: $w^{11} = \bar{w}$, w הוא מספר מרוכב השונה מ-0.

מצאו את סכום 12 הפתרונות של המשוואה.

פתרונות המשוואה שבסעיף ג מייצגים קודקודים של מצולע ששטחו שווה לשטח המרובע שמצאתם בתת-סעיף ב(2).

ד. מצאו את הערך של r .

2. חורף 2024 שאלון 582 שאלה 3

$z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו- y הם מספרים ממשיים).

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x, y) במישור גאוס המקיימות:

$$|6 - \bar{z} - 8i|^2 - |5i| = |12 + 16i|$$

הנקודה M היא מרכז המעגל המתואר בסעיף א.

המספרים המרוכבים z_A ו- z_M מייצגים את הנקודות A ו-M, בהתאמה.

נתון: למספרים z_A ו- z_M יש אותו ארגומנט (זווית).

$$2|z_A| = |z_M|$$

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A.

נתונה סדרה הנדסית z_1, z_2, z_3, \dots .

האיבר הראשון בסדרה מייצג את הנקודה A, והאיבר החמישי בסדרה מייצג את הנקודה M.

ג. מצאו את מנת הסדרה (כל האפשרויות).

ד. חשבו את הסכום: $z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + \dots + z_{10} \cdot \bar{z}_{10}$.

3. קיץ 2022 מועד ב' שאלון 582 שאלה 3

המספר $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

א. מצאו את α .

נתון: $|4iz| - \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקודי הבסיס B ו- C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו- $\frac{\bar{z}}{z}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z + k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k ?

(2) חשבו את שטח המרובע $ABOC$ (הנקודה O היא ראשית הצירים).

4. חורף 2022 שאלון 582 שאלה 3

המספר $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

א. מצאו את α .

נתון: $|4iz| - \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקודי הבסיס B ו- C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו- $\frac{\bar{z}}{z}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z + k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k ?

(2) חשבו את שטח המרובע $ABOC$ (הנקודה O היא ראשית הצירים).

5. קיץ 2021 מועד ב' שאלון 582 שאלה 3

נתונה משוואה I: $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. z הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I.

פתרונות המשוואה מיוצגים על ידי כל הקודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. מצא את שטח המצולע.

נתונה משוואה II: $(a \cdot z^2 + b)(z + 1) = 0$. z הוא מספר מרוכב, a ו- b הם מספרים ממשיים השונים מאפס.

ידוע כי שניים מבין הפתרונות של המשוואה הם מספרים מדומים.

ג. הוכח כי $a \cdot b > 0$.

ד. מצא את פתרונות משוואה II. הבע באמצעות a ו- b , אם יש צורך.

ידוע כי הפתרונות המדומים של משוואה II מיוצגים על ידי נקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית הצירים

והרדיוס שלו גדול פי שניים מן הערך המוחלט של פתרונות משוואה I.

ה. מצא את היחס $\frac{b}{a}$.

6. קיץ 2021 מועד א' שאלון 582 שאלה 3

נתונה המשוואה $z^4 = -16$ (z הוא מספר מרוכב).

א. פתור את המשוואה.

נתון: פתרונות המשוואה מייצגים קודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. סרטט במערכת הצירים את המצולע שהתקבל.

גופלים ב- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע.

ג. מצא את שיעורי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים שהתקבלו בהכפלה.

n הוא מספר טבעי, $11 < n < 17$ ו- c הוא מספר ממשי.

כל אחד מן המספרים המרוכבים שמצאת בסעיפים הקודמים מקיים את המשוואה $z^n = c$.

ד. מצא את n ואת c .

הנקודות במישור גאוס, המיוצגות על ידי כל הפתרונות של המשוואה $z^n = c$ שמצאת בסעיף ד, יוצרות

מצולע בעל n צלעות.

ה. מצא את שטח המצולע.

7. חורף 2021 שאלון 582 שאלה 3

נתונה המשוואה $i \cdot z^6 = \frac{1}{64}$ (z הוא מספר מרוכב).

א. מצא את כל פתרונות המשוואה הנתונה.

פתרונות המשוואה הנתונה מתאימים לקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ב. הראה שלכל אחד מקודקודי המצולע קיים קודקוד אחד בדיוק כך שהישר שמחבר ביניהם עובר דרך ראשית הצירים.

כופלים כל אחד מפתרונות המשוואה הנתונה במספר מרוכב קבוע, w .

ג. הסבר מדוע סכום המספרים שהתקבלו הוא אפס.

$$\text{נתון: } w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ד. כתוב משוואה שפתרונותיה הם 12 המספרים: פתרונות המשוואה הנתונה בתחילת השאלה והמספרים שהתקבלו לאחר ההכפלה ב-w .

8. קיץ 2023 מועד א' שאלון 582 שאלה 3

נתונה המשוואה $z^3 = \frac{1}{3}$, z הוא מספר מרוכב.

נתון גם כי המספר z_0 הוא אחד מפתרונות המשוואה וכי הוא מיוצג על ידי נקודה הנמצאת ברביע הרביעי במישור גאוס.

א. מצאו את המספר המרוכב z_0 .

הנקודות A, B ו-C מיוצגות במישור גאוס על ידי המספרים המרוכבים $d \cdot z_0$, $d i \cdot z_0$ ו- $d \cdot (z_0)^4$ בהתאמה, $d > 0$ הוא פרמטר.

נתון כי שטח המשולש ABC הוא $5d + 6$.

ב. מצאו את הערך של d.

$$\text{נגדיר: } w = \left((z_0)^2 - \frac{1}{(z_0)^2} \right) (1 + i)$$

ג. מצאו את $|w|$ ואת הארגומנט (הזווית) של w.

נתון כי המספר w^n (n הוא מספר טבעי) הוא מספר מדומה טהור, ונמצא מחוץ למעגל החוסם את המשולש ABC.

ד. מצאו את הערך המינימלי האפשרי של n.

9. קיץ 2020 מועד ב' שאלון 582 שאלה 3

z הוא מספר מרוכב.

א. פתור את המשוואה $z^5 = 2^5$.

הנקודות A_1, A_2, \dots, A_n במישור גאוס מתאימות לפתרונות המשוואה $z^n = 2^n$ ($n \geq 3$ הוא מספר טבעי).

חיברו את הנקודות A_1, A_2, \dots, A_n ויצרו מצולע משוכלל קמור.

נתון כי שטח המצולע שהתקבל שווה ל- n .

ב. מצא את n .

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב.

ג. באילו רביעים נמצאים פתרונות w כאלה? $w = a + bi$ הוא פתרון של המשוואה $z^n = 2^n$ כך ש- $a \cdot b > 0$ [כלומר: $\text{Re}(w) \cdot \text{Im}(w) > 0$].

ד. מצא את הזווית θ . נמק.

ארבע הנקודות הנמצאות ברביעים שמצאת בסעיף ג הן קודקודיו של מלבן.

אם מכפילים כל אחד מן המספרים המתאימים לארבע הנקודות הללו

במספר $z_0 = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$), מתקבל מלבן חדש, שצלעותיו מקבילות לצירים.

ז. מצא את הזווית θ . נמק.

10. קיץ 2020 מועד א' שאלון 582 שאלה 3

z_1 ו- z_2 הם שני מספרים מרוכבים שונים.

נתון: $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $z_2 = \cos \frac{7\alpha}{3} + i \sin \frac{7\alpha}{3}$,

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$$

$\frac{z_1}{z_2}$ הוא מספר ממשי.

א. (1) מצא את α ואת $\frac{z_1}{z_2}$.

(2) הראה כי $z_1 \cdot z_2$ הוא מספר מדומה.

נתון: $w = \frac{z_1}{z_2} + z_1 \cdot z_2$.

ב. מצא את כל פתרונות המשוואה $z^3 = w^6$.

ג. (1) האם הפתרונות שמצאת בסעיף ב יכולים להתאים לקודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס?

אם כן, מצא את שיעוריהם של שאר קודקודי המשושה.

(2) תן דוגמה למספר טבעי $n > 6$ שבעבורו הפתרונות שמצאת בסעיף ב מהווים קודקודים של מצולע משוכלל

בעל n קודקודים.

11. קיץ 2019 מועד א' שאלון 582 שאלה 3

א. (1) הוכח כי לכל מספר מרוכב z מתקיים $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

(2) הוכח כי אם המספר המרוכב z נמצא על מעגל היחידה, אז גם המספר $\frac{1}{z}$ נמצא על מעגל היחידה.

ב. (1) הראה כי בעבור כל מספר מרוכב z הנמצא על מעגל היחידה, הסכום $z + \frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי.

(2) z_1 ו- z_2 הם מספרים מרוכבים הנמצאים על מעגל היחידה.

נתון כי הרכיבים המדומים של z_1 ו- z_2 הם חיוביים.

הוכח כי אם: $z_1 + \frac{1}{z_1} + z_2 + \frac{1}{z_2} > 2$ אז z_1 ו- z_2 נמצאים ברביע הראשון.

$w = 1 \cdot \text{cis}(\alpha)$ הוא מספר מרוכב. נתון: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא $\frac{1}{w}$ והאיבר השני הוא w .

נתון כי סכום 5 האיברים הראשונים בסדרה הנדסית שווה ל-0.

ג. (1) הבע באמצעות α את מנת הסדרה, והסבר מדוע כל איברי הסדרה נמצאים על מעגל היחידה.

(2) מצא את α (מצא את שתי האפשרויות).

12. קיץ 2019 מועד ב' שאלון 582 שאלה 3

נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא 1 והאיבר השני שלה הוא iz (z הוא מספר מרוכב). נתון כי הסדרה איננה קבועה.

א. (1) רשום את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה (אם יש צורך, הבע באמצעות z).

(2) הוכח כי סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה שווה ל- $\frac{z^5 + i}{z + i}$.

ב. (1) מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^5 = -i$ (z הוא מספר מרוכב).

(2) מצא את כל הפתרונות של המשוואה $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$ (z הוא מספר מרוכב).

הנקודה A נמצאת ברביע השלישי במישור גאוס, והיא מתאימה לאחד מפתרונות המשוואה שפתרת בתת-סעיף ב (2).

ABO הוא משולש שווה צלעות במישור גאוס (O – ראשית הצירים).

ג. מצא את המספר המרוכב המתאים לנקודה B (מצא את שתי האפשרויות).